I) Division euclidienne

Définition

Soient a et b deux nombres entiers avec $b \neq 0$.
Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver les nombres entiers q et r tel que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < b$$

Pour la division euclidienne, le nombre a est appelé **dividende**, le nombre b est appelé **diviseur**, le nombre q est appelé le **quotient** et le nombre r est appelé le **reste**.

Remarque. Ta calculatrice est capable d'effectuer la division euclidienne d'un nombre entier par un autre nombre. Pour cela il faut trouver la touche $\vdash$ ou encore la touche **÷R** selon ton modèle de calculatrice.

Exemple. Effectuons la division euclidienne de 1248 par 23.

$$\begin{array}{r|l} 1\,2\,4\,8 & 2\,3 \\ \hline 9\,8 & 5\,4 \\ 6 & \end{array}$$

```
1248 ⊢ 23
                Q=54;R=6
```

On peut donc en conclure que $1248 = 23 \times 54 + 6$

II) Vocabulaire

Définition

Soients a et b deux nombres entiers avec $b \neq 0$.
On dit que b est un **diviseur** de a si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Remarque. On dit aussi que :

- Le nombre b **divise** a ;
- Le nombre a est **divisible** par b ;
- Le nombre a est un **multiple** de b.

Exemple. La division euclidienne de 1104 par 46 a pour reste 0. En effet $1104 = 46 \times 24$.
On dit alors que :

- 1104 est **divisible** par 46 et 24
- 1104 est un **multiple** de 46 et 24
- 46 et 24 **divisent** 1104
- 46 et 24 sont des **diviseurs** de 1104

Méthode

Pour dresser la liste des diviseurs d'un nombre :

- On commence par noter 1 et lui-même qui sont les deux premiers diviseurs évidents ;
- On cherche les diviseurs par couple.
  Par exemple, 2 est un diviseur de 24. $24 \div 2 = 12$ donc 12 est aussi un diviseur de 24 ;
- On essaye ensuite les nombres entiers successifs. On s'arrête lorsqu'on atteint la racine carrée du nombre dont on cherche les diviseurs

III) Critères de divisibilité

Propriété

Un nombre est divisible :

- par 2 : si il est pair. • par 5 : si il se termine par 0 ou 5. • par 10 : si il se termine par 0.
- par 3 : si la somme des chiffres qui le compose est divisible par 3.
- par 9 : si la somme des chiffres qui le compose est divisible par 9.
- par 4 : si le nombre composé de son chiffre des dizaines et son chiffre des unités est divisible par 4.

IV) Nombres premiers

Définition

Un nombre est **premier** si il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque. Voici la liste des premiers nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; ...

Propriété

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers.

Méthode

Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers :

1. On cherche un diviseur premier du nombre. (On essaye d'abord avec 2, puis 3, puis 5, etc.)
2. On effectue la division du nombre par le facteur premier trouvé.
3. On recommence le raisonnement avec le quotient obtenu. On sarrête lorsque le quotient obtenu est 1.

Exemple.

Pour décomposer le nombre 198 :

- On vérifie si 2 est un diviseur de 198 : c'est le cas car $198 \div 2 = 99$. On continue en décomposant maintenant 99.
- On vérifie si 2 est un diviseur de 99 : ce n'est pas le cas. On vérifie si 3 est un diviseur de 99 : c'est le cas car $99 \div 3 = 33$. On continue en décomposant maintenant 33.
- On vérifie si 3 est un diviseur de 33 : c'est le cas car $33 \div 3 = 11$. On continue en décomposant maintenant 11.
- 11 est un nombre premier. Il n'est donc pas divisible par 3, par 5 ou par 7. Il est divisible par 11. Le quotient obtenu est 1.

$$\begin{array}{r|l} 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$$198 = 2 \times 3 \times 3 \times 11$$

Remarque. Ta calculatrice est capable d'effectuer la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre entier. Pour cela il faut d'abord appuyer sur la touche **2nde** puis trouver la touche **Décomp** $\vdash$ ou encore la touche **Fact** $\div$**R** ou bien encore **▶decomp** **▶simp** selon ton modèle de calculatrice.

Exemple. Pour décomposer le nombre 2450 :

$$\begin{array}{r|l} 2\,450 & 2 \\ 1\,225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$2450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$

```
2450
                    2 × 5² × 7²
```

Définition

Une fraction est dite irréductible lorsque l'on ne peut plus la simplifier.

Méthode

Pour rendre une fraction irréductible :

1. On décompose le numérateur et le dénominateur en un produit de facteurs premiers.
2. On simplifie les multiplications communes au numérateur et au dénominateur

Exemple. On souhaite simplifier la fraction $\dfrac{462}{3\,850}$ et la rendre irréductible.

1. Avec la calculatrice, on décompose 462 et 3 850 en produits de facteurs premiers
   - $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$
   - $3850 = 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11$
2. On simplifie les multiplications communes au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{462}{3\,850} = \frac{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{7} \times \cancel{11}}{\cancel{2} \times 5 \times 5 \times \cancel{7} \times \cancel{11}} = \frac{3}{5 \times 5} = \frac{3}{25}$$